MATEMATIKA I: Analiza

Po udžbeniku M. Merkle, *Matematička analiza*

Elektrotehnički fakultet u Beogradu

2004

Slajdovi za predavanja na odseku za Softversko inženjerstvo

Pregled sadržaja kursa

Pregled sadržaja kursa

- UVOD U ANALIZU: Pojam beskonačnosti, poredak, nejednakosti, elementarne funkcije i njihovi grafici.

Pregled sadržaja kursa

- UVOD U ANALIZU: Pojam beskonačnosti, poredak, nejednakosti, elementarne funkcije i njihovi grafici.
- NIZOVI: Pojam niza, granična vrednost, monotoni nizovi.Broj e.Skupovi na realnoj pravoj i njihove osobine. Banahov stav i metod iteracije.

Pregled sadržaja kursa

- UVOD U ANALIZU: Pojam beskonačnosti, poredak, nejednakosti, elementarne funkcije i njihovi grafici.
- NIZOVI: Pojam niza, granična vrednost, monotoni nizovi.Broj e.Skupovi na realnoj pravoj i njihove osobine. Banahov stav i metod iteracije.
- GRANIČNE VREDNOSTI FUNKCIJA: Limesi funkcija, neprekidne funkcije, osobine. Metod polovljenja intervala za rešavanje jednačina. Beskonačno male veličine i njihovo poređenje.

Pregled sadržaja kursa

- UVOD U ANALIZU: Pojam beskonačnosti, poredak, nejednakosti, elementarne funkcije i njihovi grafici.
- NIZOVI: Pojam niza, granična vrednost, monotoni nizovi.Broj e.Skupovi na realnoj pravoj i njihove osobine. Banahov stav i metod iteracije.
- GRANIČNE VREDNOSTI FUNKCIJA: Limesi funkcija, neprekidne funkcije, osobine. Metod polovljenja intervala za rešavanje jednačina. Beskonačno male veličine i njihovo poređenje.
- DIFERENCIJALNI RAČUN: Pojam tangente i izvod funkcije, pravila i tablica izvoda. Metod tangente za rešavanje jednačina. Izvodi složene funkcije, izvodi parametarski zadate funkcije. Teoreme o srednjoj vrednosti. Primene. Lopitalovo pravilo. Izvodi višeg reda. Tejlorova formula. Ispitivanje funkcija.

Sve to je samo mali deo velikog ledenog brega...

Sve to je samo mali deo velikog ledenog brega...
A svako putovanje od hiljadu kilometara
mora započeti jednim korakom

Uvod u analizu

- Kardinalni brojevi (razne vrste beskonačnosti)
- Realni brojevi, simbol ∞ i osobine
- Kompleksni brojevi - pregled osobina
- Nejednakosti koje ćemo koristiti u toku kursa

Kardinalni brojevi

Došli su gosti u hotel, a jedan iz grupe je malo zakasnio. Kada se pojavio na recepciji, ispostavilo se da su se ostali već razmestili po sobama i da za njega nema slobodne sobe. Portir je malo razmislio a onda se dosetio. Javio je svim gostima da se presele u sobu koja ima za jedan veći broj od one u kojoj su do tada bili. Kada je to urađeno, ostala je jedna soba viška, koju je uzeo zakasneli gost.

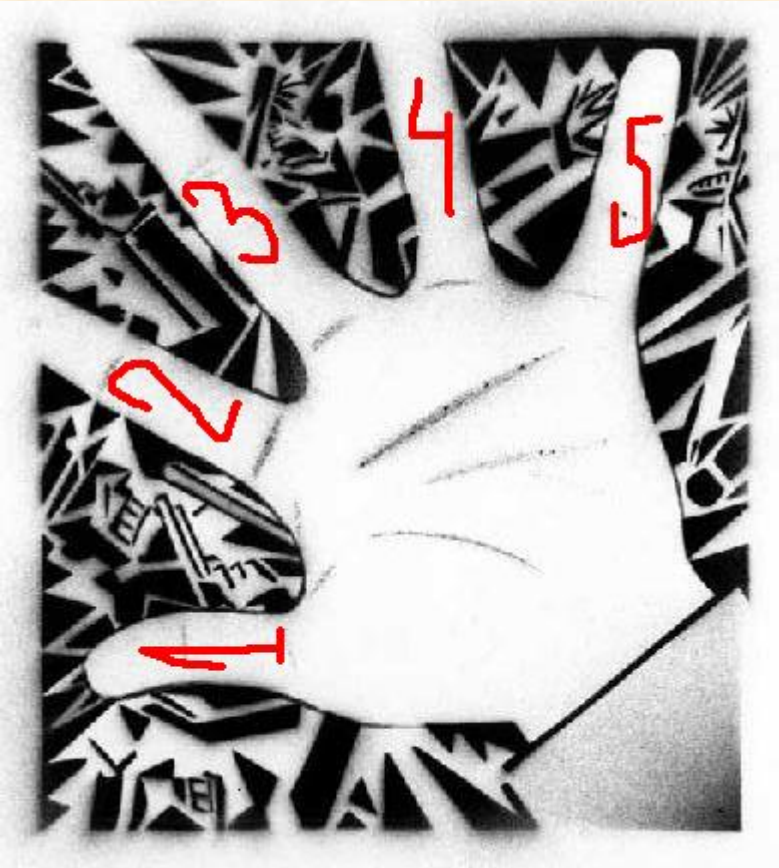
Hotel je imao beskonačno mnogo soba!

PRE: 1 2 3 4 5 ...
POSLE: 2 3 4 5 6 ...

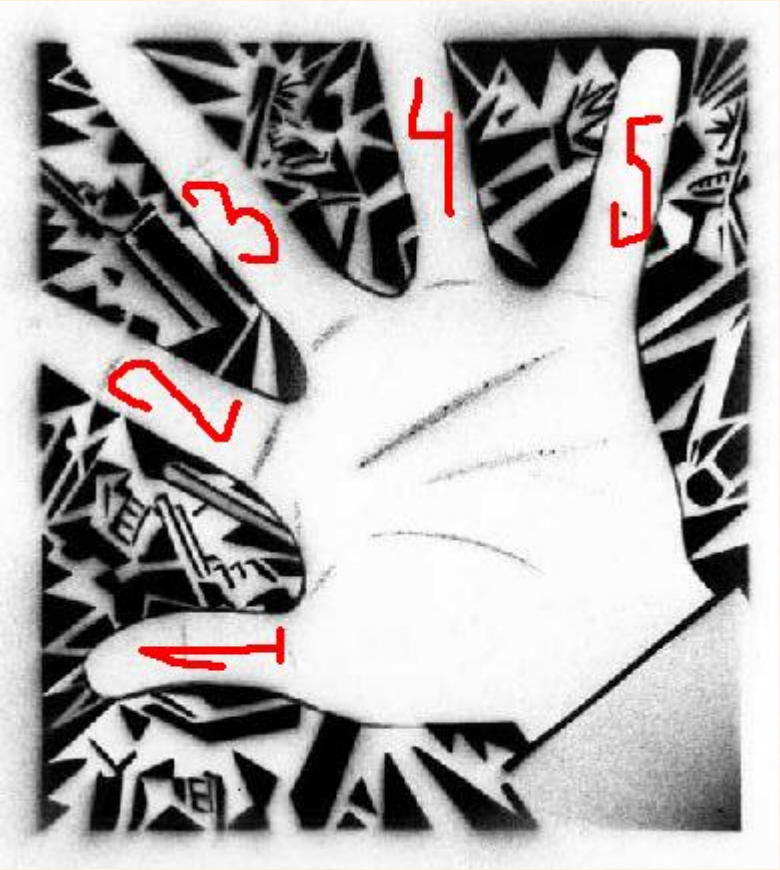
Ostala je prazna soba broj 1 !

Kako prebrojavamo konačne skupove?

Kako prebrojavamo konačne skupove?



Kako prebrojavamo konačne skupove?



Uspostavljena je bijekcija između skupa prstiju i skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

KAKO PREBROJAVATI BESKONAČNE SKUPOVE?

KAKO PREBROJAVATI BESKONAČNE SKUPOVE?

Beskonačni skupovi se mogu **POREDITI** po "veličini".

KAKO PREBROJAVATI BESKONAČNE SKUPOVE?

Beskonačni skupovi se mogu **POREDITI** po "veličini".

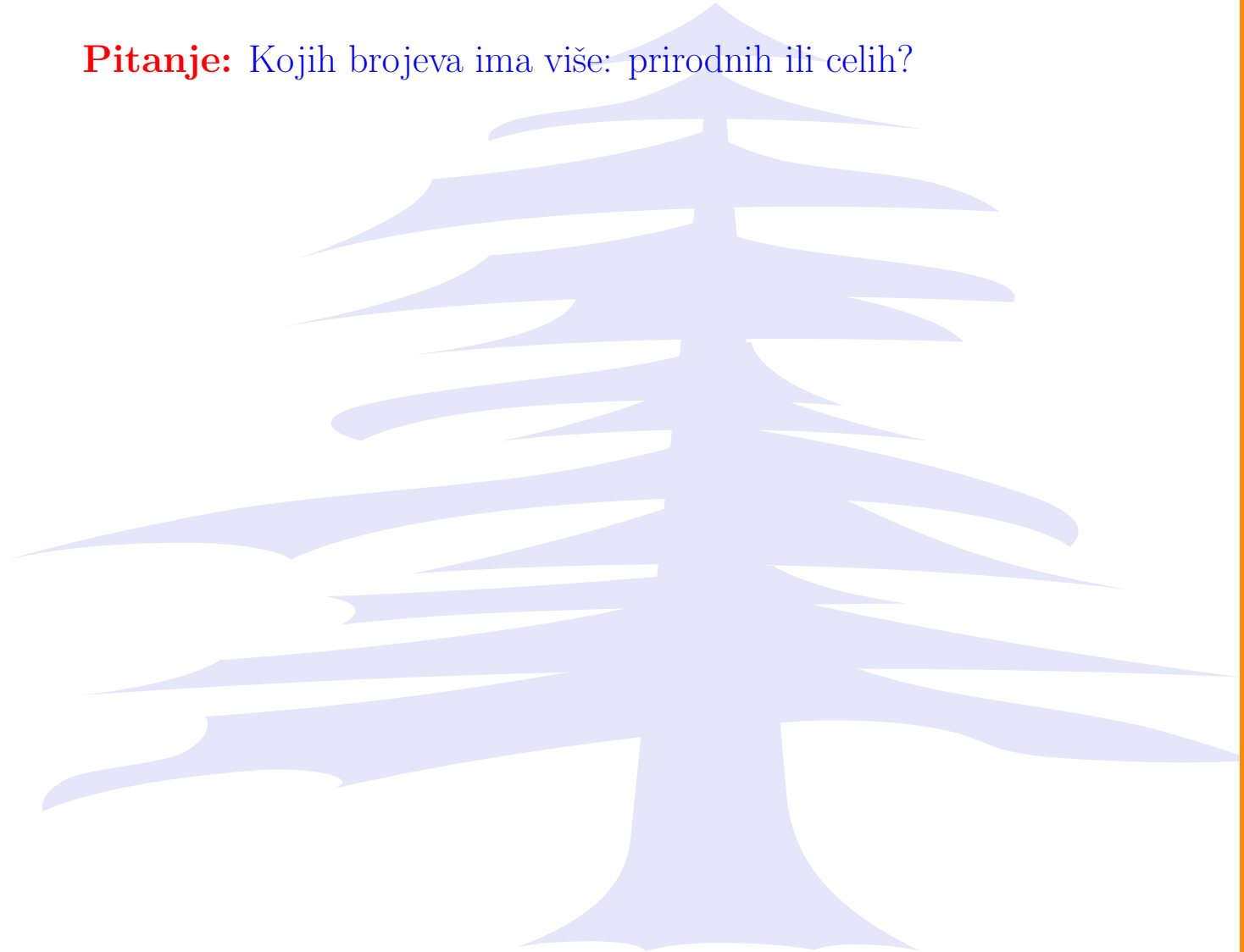
Pitanje *koji od dva beskonačna skupa ima više elemenata* nema smisla ako se pokuša rešiti po analogiji sa konačnim skupovima.

KAKO PREBROJAVATI BESKONAČNE SKUPOVE?

Beskonačni skupovi se mogu **POREDITI** po "veličini".

Pitanje *koji od dva beskonačna skupa ima više elemenata* nema smisla ako se pokuša rešiti po analogiji sa konačnim skupovima.

Pitanje: Kojih brojeva ima više: prirodnih ili celih?



Pitanje: Kojih brojeva ima više: prirodnih ili celih?

Odgovor 1: Celih brojeva ima više, jer je skup prirodnih brojeva pravi podskup skupa celih brojeva.

Pitanje: Kojih brojeva ima više: prirodnih ili celih?

Odgovor 1: Celih brojeva ima više, jer je skup prirodnih brojeva pravi podskup skupa celih brojeva.

Odgovor 2: Prirodnih brojeva ima više, što se izlazi iz sledećeg postupka: Pridružimo broju 0 broj 2, broju 1 broj 4, broju -1 broj 6, itd. Na taj način izlazi da celih brojeva ima isto koliko i parnih, a to je pravi podskup skupa prirodnih brojeva!

$$\begin{array}{cccccccccccc} \ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & \text{SVI CELI BROJEVI} \\ \ldots & 14 & 10 & 6 & 2 & 4 & 8 & 12 & \ldots & \text{PARNI PRIRODNI BROJEVI} \end{array}$$

Pitanje: Kojih brojeva ima više: prirodnih ili celih?

Odgovor 1: Celih brojeva ima više, jer je skup prirodnih brojeva pravi podskup skupa celih brojeva.

Odgovor 2: Prirodnih brojeva ima više, što se izlazi iz sledećeg postupka: Pridružimo broju 0 broj 2, broju 1 broj 4, broju -1 broj 6, itd. Na taj način izlazi da celih brojeva ima isto koliko i parnih, a to je pravi podskup skupa prirodnih brojeva!

$$\begin{array}{cccccccccl} \ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & \text{SVI CELI BROJEVI} \\ \ldots & 14 & 10 & 6 & 2 & 4 & 8 & 12 & \ldots & \text{PARNI PRIRODNI BROJEVI} \end{array}$$

Odgovor 3: Prirodnih brojeva ima isto koliko i celih, jer se može uspostaviti sledeće preslikavanje:

$$\begin{array}{cccccccccl} \ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & \text{SVI CELI BROJEVI} \\ \ldots & 7 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & \ldots & \text{SVI PRIRODNI BROJEVI} \end{array}$$

• Kažemo da skupovi A i B imaju **isti kardinalni broj**, u oznaci card A = card B, ako postoji bijektivno preslikavanje koje svakom elementu jednog skupa dodeljuje jedan i samo jedan element drugog skupa.

• Kažemo da skupovi A i B imaju **isti kardinalni broj**, u oznaci card A = card B, ako postoji bijektivno preslikavanje koje svakom elementu jednog skupa dodeljuje jedan i samo jedan element drugog skupa.

• Ako postoji bijekcija koja preslikava skup A na neki pravi podskup skupa B, a ne postoji bijekcija koja preslikava skup B na skup A ili na neki njegov podskup, kažemo da skup A ima manji kardinalni broj od skupa B.

• Kažemo da skupovi A i B imaju **isti kardinalni broj**, u oznaci card A = card B, ako postoji bijektivno preslikavanje koje svakom elementu jednog skupa dodeljuje jedan i samo jedan element drugog skupa.

• Ako postoji bijekcija koja preslikava skup A na neki pravi podskup skupa B, a ne postoji bijekcija koja preslikava skup B na skup A ili na neki njegov podskup, kažemo da skup A ima manji kardinalni broj od skupa B.

• Ako se skup A sastoji od n elemenata ($n \in \mathbf{N}$), kažemo da je card $A = n$.

• Kažemo da skupovi A i B imaju **isti kardinalni broj**, u oznaci card A = card B, ako postoji bijektivno preslikavanje koje svakom elementu jednog skupa dodeljuje jedan i samo jedan element drugog skupa.

• Ako postoji bijekcija koja preslikava skup A na neki pravi podskup skupa B, a ne postoji bijekcija koja preslikava skup B na skup A ili na neki njegov podskup, kažemo da skup A ima manji kardinalni broj od skupa B.

• Ako se skup A sastoji od n elemenata ($n \in \mathbf{N}$), kažemo da je card $A = n$.

Prema tome, skupovi prirodnih, celih, parnih i neparnih brojeva imaju isti kardinalni broj.

• Kažemo da skupovi A i B imaju **isti kardinalni broj**, u oznaci card A = card B, ako postoji bijektivno preslikavanje koje svakom elementu jednog skupa dodeljuje jedan i samo jedan element drugog skupa.

• Ako postoji bijekcija koja preslikava skup A na neki pravi podskup skupa B, a ne postoji bijekcija koja preslikava skup B na skup A ili na neki njegov podskup, kažemo da skup A ima manji kardinalni broj od skupa B.

• Ako se skup A sastoji od n elemenata ($n \in \mathbf{N}$), kažemo da je card $A = n$.

Prema tome, skupovi prirodnih, celih, parnih i neparnih brojeva imaju isti kardinalni broj.

Za skupove koji imaju isti kardinalni broj kao skup prirodnih brojeva kažemo da su **prebrojivi**. Kardinalni broj prebrojivih skupova označava se sa $\aleph_0$ (čita se *alef nula*)

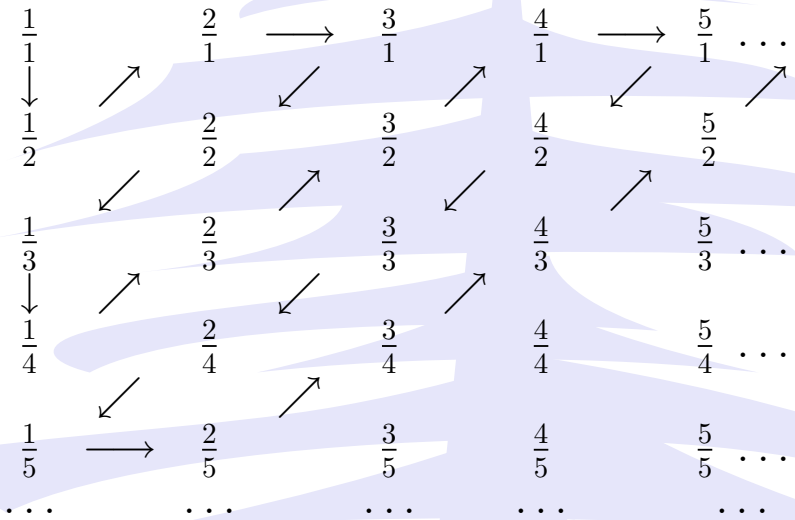
SVAKI SKUP ČIJI SE ELEMENTI MOGU PRIKAZATI U OBLIKU NIZA

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$$

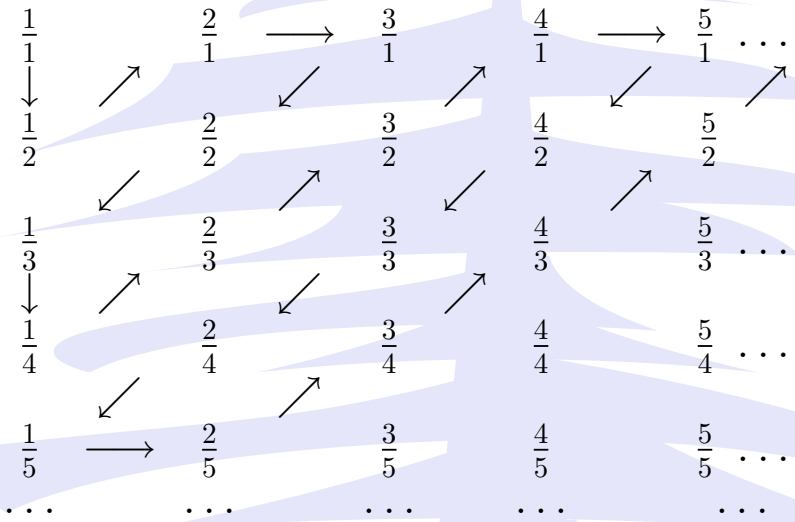
JE PREBROJIV.

Skup racionalnih brojeva je prebrojiv.

Skup racionalnih brojeva je prebrojiv.



Skup racionalnih brojeva je prebrojiv.



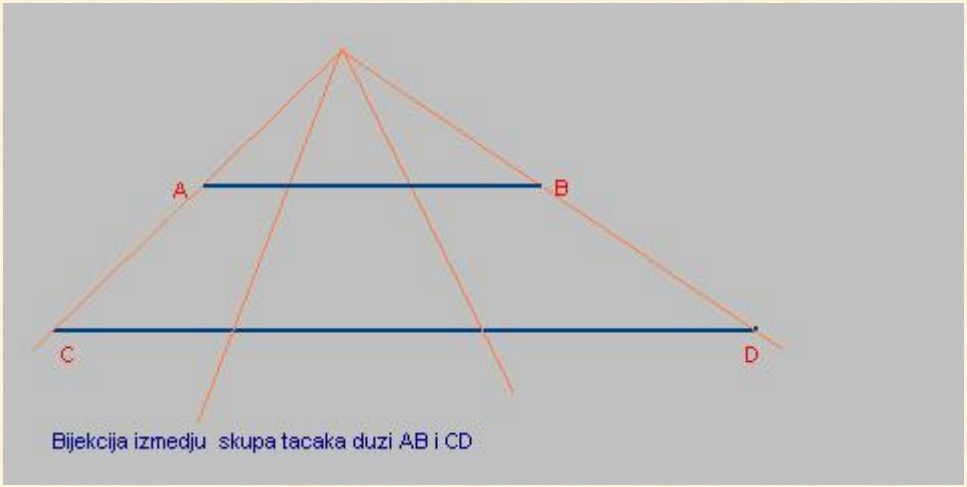
Na ovaj način se dobija niz svih pozitivnih racionalnih brojeva. Odavde se lako dobija niz **SVIH** racionalnih brojeva, $\{r_n\}$.

Kako?

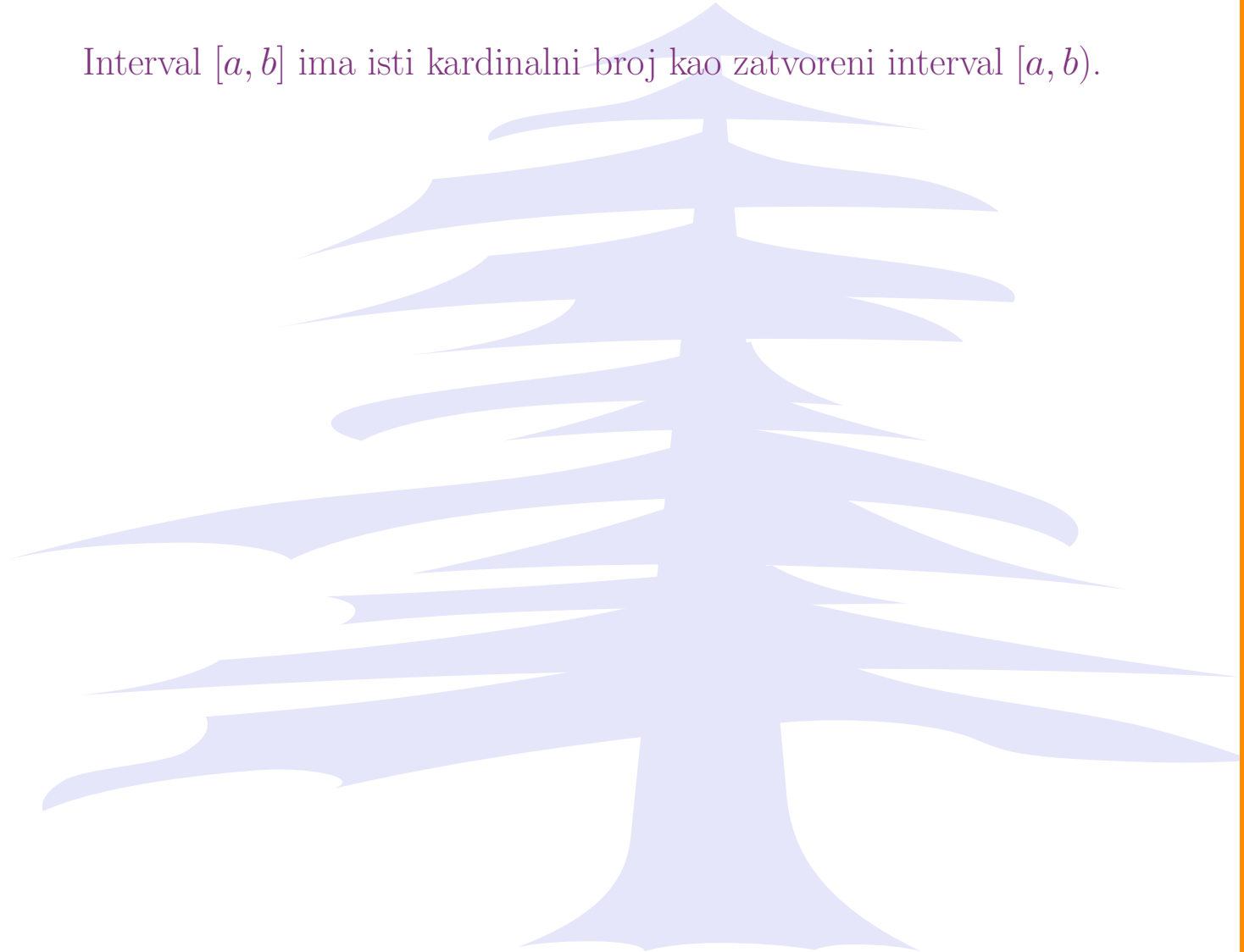
POSTOJE I SKUPOVI SA VEĆIM KARDINALNIM BROJEM OD $\aleph_0$ - NEPREBROJIVI SKUPOVI.

Svaka dva zatvorena intervala imaju isti kardinalni broj.

Svaka dva zatvorena intervala imaju isti kardinalni broj.



Interval $[a, b]$ ima isti kardinalni broj kao zatvoreni interval $[a, b)$.



Interval $[a, b]$ ima isti kardinalni broj kao zatvoreni interval $[a, b)$.
Neka je $x_1, x_2, \ldots, x_k \ldots$ proizvoljan niz elemenata skupa $[a, b]$.

$$f(b) = x_1\,, \quad f(x_k) = x_{k+1}\ (k = 1, 2, \ldots) \qquad f(x) = x\ (x \neq x_1, x_2, \ldots)$$

Funkcija f je bijekcija $[a, b] \mapsto [a, b)$.

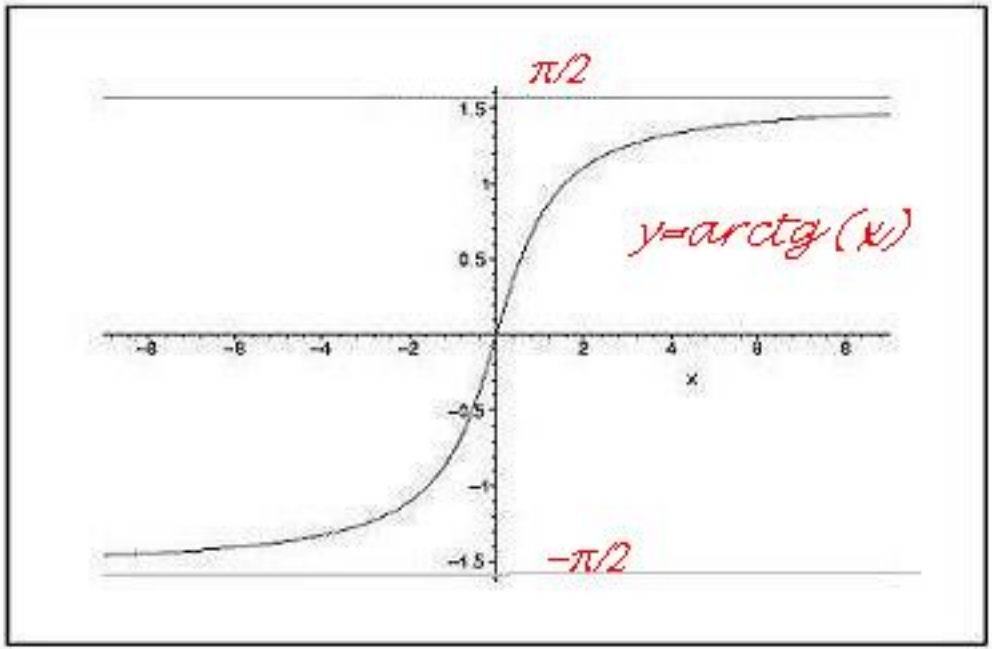
Zaključak: SVAKA DVA INTERVALA imaju isti kardinalni broj. Na primer, intervali $(0, 1)$ i $[100, 1000000)$ imaju isti kardinalni broj.

Zaključak: SVAKA DVA INTERVALA imaju isti kardinalni broj. Na primer, intervali $(0, 1)$ i $[100, 1000000)$ imaju isti kardinalni broj.

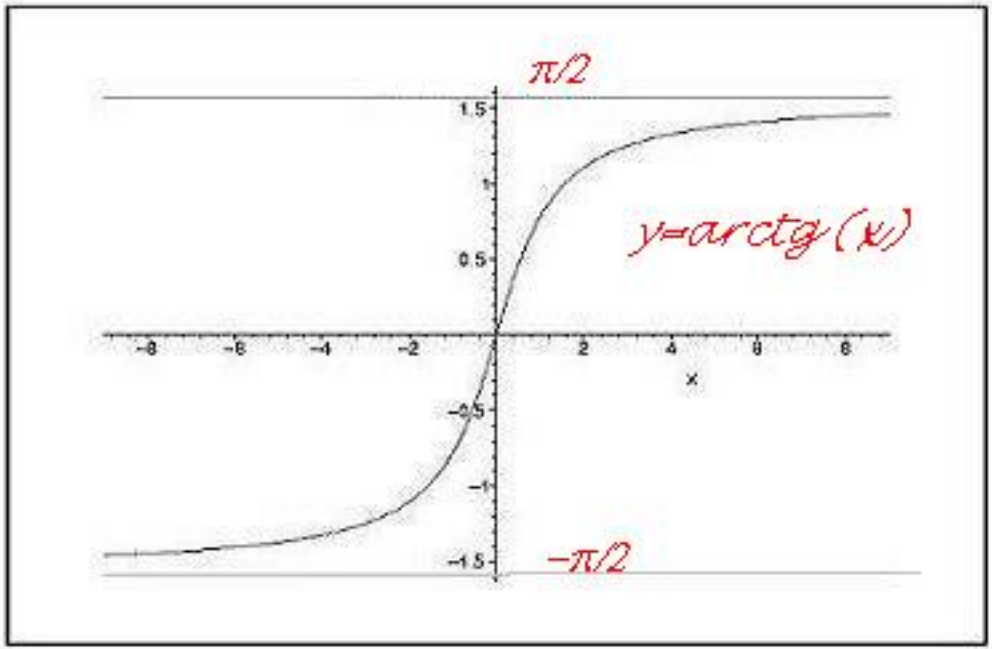
SKUP TAČAKA PROIZVOLJNOG INTERVALA JE NEPREBROJIV, TJ. KARDINALNI BROJ SKUPA TAČAKA INTERVALA JE VEĆI OD $\aleph_0$.

Skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ ima isti kardinalni broj kao interval $(-\pi/2, \pi/2)$:

Skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ ima isti kardinalni broj kao interval $(-\pi/2, \pi/2)$:



Skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ ima isti kardinalni broj kao interval $(-\pi/2, \pi/2)$:



Kardinalni broj skupa realnih brojeva označava se sa c (kontinuum)

.

POSTOJE I VEĆI KARDINALNI BROJEVI . . .

Realni brojevi

Prošireni skup realnih brojeva: $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Realni brojevi

Prošireni skup realnih brojeva: $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Usvajamo pravila: $(\forall x \in \mathbf{R}) \qquad -\infty < x < +\infty$.

Realni brojevi

Prošireni skup realnih brojeva: $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Usvajamo pravila: $(\forall x \in \mathbf{R}) \qquad -\infty < x < +\infty$.

$$-\infty < +\infty \ ,$$

Realni brojevi

Prošireni skup realnih brojeva: $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Usvajamo pravila: $(\forall x \in \mathbf{R}) \qquad -\infty < x < +\infty$.

$$-\infty < +\infty \ ,$$

$$\infty + \infty = \infty \ , -\infty - \infty = -\infty \ , a \pm \infty = \pm\infty \quad (a \in \mathbf{R}),$$

Realni brojevi

Prošireni skup realnih brojeva: $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Usvajamo pravila: $(\forall x \in \mathbf{R}) \qquad -\infty < x < +\infty$.

$$-\infty < +\infty \ ,$$

$$\infty + \infty = \infty \ , -\infty - \infty = -\infty \ , a \pm \infty = \pm\infty \quad (a \in \mathbf{R}),$$

$$\infty \cdot \infty = \infty \ , -\infty \cdot \infty = \infty \cdot -\infty = -\infty \ , a \cdot \pm\infty = \pm(\operatorname{sgn} a) \cdot \infty \quad (a \neq 0).$$

Realni brojevi

Prošireni skup realnih brojeva: $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Usvajamo pravila: $(\forall x \in \mathbf{R}) \qquad -\infty < x < +\infty$.

$$-\infty < +\infty \ ,$$

$$\infty + \infty = \infty \ , -\infty - \infty = -\infty \ , a \pm \infty = \pm\infty \quad (a \in \mathbf{R}),$$

$$\infty \cdot \infty = \infty \ , -\infty \cdot \infty = \infty \cdot -\infty = -\infty \ , a \cdot \pm\infty = \pm(\operatorname{sgn} a) \cdot \infty \quad (a \neq 0).$$

Ostale operacije sa simbolima ∞ i $-\infty$ **nisu dozvoljene**. Na primer, izrazi $\infty - \infty$ ili $0 \cdot \infty$ nemaju smisla!

Neka je A dati skup realnih brojeva. **Minimum** i **maksimum** skupa A definišu se na sledeći način:

Neka je A dati skup realnih brojeva. **Minimum** i **maksimum** skupa A definišu se na sledeći način:

- $$\min\{x \mid x \in A\} = a \iff a \in A \ \wedge \ (\forall x \in A)\, a \leq x,$$

Neka je A dati skup realnih brojeva. **Minimum** i **maksimum** skupa A definišu se na sledeći način:

- $$\min\{x \mid x \in A\} = a \iff a \in A \ \wedge \ (\forall x \in A)\, a \leq x,$$
- $$\max\{x \mid x \in A\} = b \iff b \in A \ \wedge \ (\forall x \in A)\, b \geq x.$$

Neka je A dati skup realnih brojeva. **Minimum** i **maksimum** skupa A definišu se na sledeći način:

- $$\min\{x \mid x \in A\} = a \iff a \in A \ \wedge \ (\forall x \in A)\, a \leq x,$$
- $$\max\{x \mid x \in A\} = b \iff b \in A \ \wedge \ (\forall x \in A)\, b \geq x.$$

Minimum i maksimum ne moraju da postoje. Na primer, skup tačaka intervala $(0, 1)$ nema ni minimum ni maksimum (jer 0 i 1 ne pripadaju tom skupu!!)

Neka je A dati skup realnih brojeva. **Minimum** i **maksimum** skupa A definišu se na sledeći način:

- $$\min\{x \mid x \in A\} = a \iff a \in A \ \wedge \ (\forall x \in A)\, a \leq x,$$
- $$\max\{x \mid x \in A\} = b \iff b \in A \ \wedge \ (\forall x \in A)\, b \geq x.$$

Minimum i maksimum ne moraju da postoje. Na primer, skup tačaka intervala $(0, 1)$ nema ni minimum ni maksimum (jer 0 i 1 ne pripadaju tom skupu!!)

Svaki skup koji se sastoji od **konačno mnogo** *realnih brojeva ima minimum i maksimum.*

- $a \in \overline{\mathbf{R}}$ je **donja granica** skupa A, ako za svako $x \in A$ važi $a \leq x$. Za skup koji ima konačnu donju granicu kažemo da je **ograničen odozdo**.

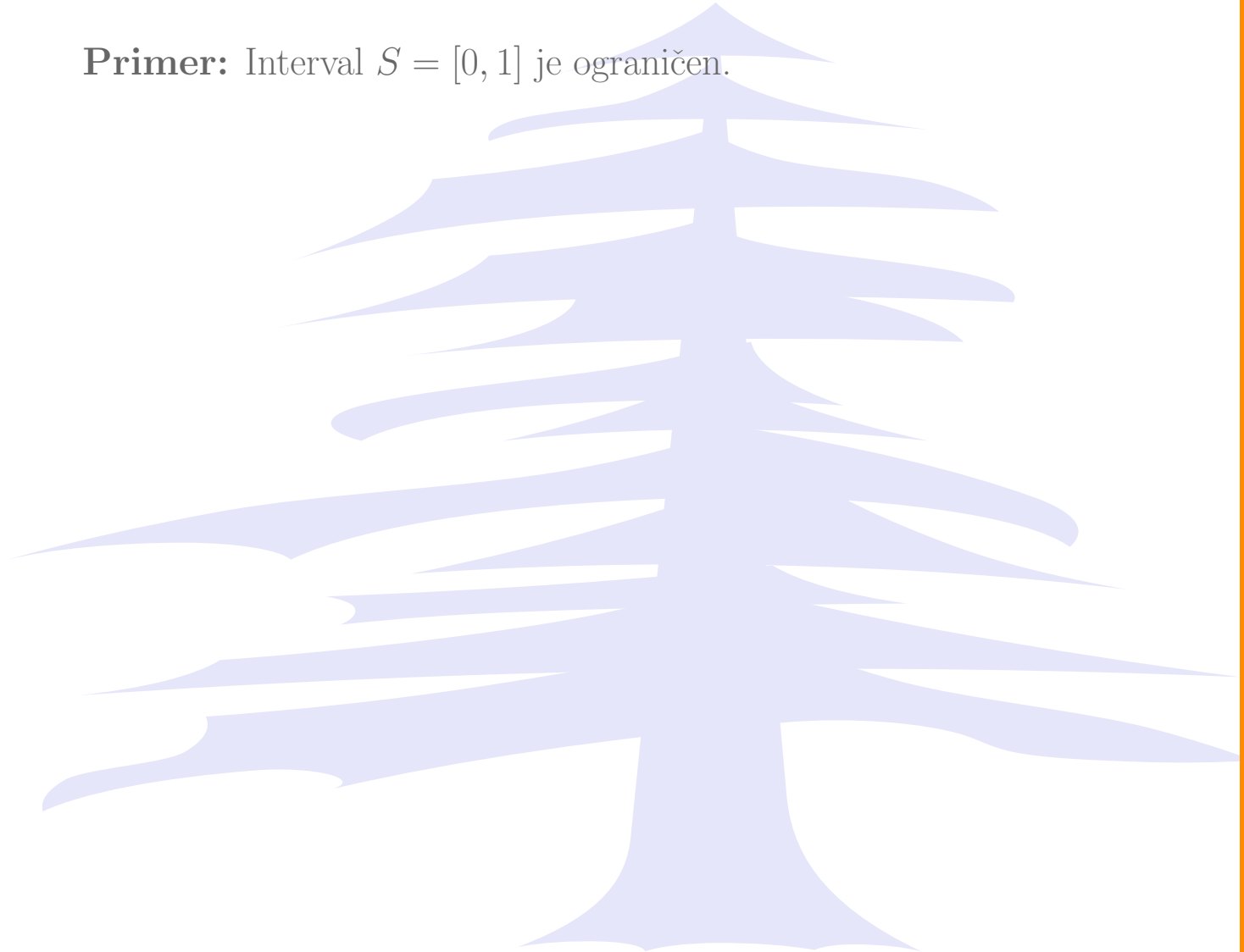
- $a \in \overline{\mathbf{R}}$ je **donja granica** skupa A, ako za svako $x \in A$ važi $a \leq x$. Za skup koji ima konačnu donju granicu kažemo da je **ograničen odozdo**.
- $b \in \overline{\mathbf{R}}$ je **gornja granica** skupa A, ako za svako $x \in A$ važi $x \leq b$. Za skup koji ima konačnu gornju granicu kažemo da je **ograničen odozgo**.

- $a \in \overline{\mathbf{R}}$ je **donja granica** skupa A, ako za svako $x \in A$ važi $a \leq x$. Za skup koji ima konačnu donju granicu kažemo da je **ograničen odozdo**.
- $b \in \overline{\mathbf{R}}$ je **gornja granica** skupa A, ako za svako $x \in A$ važi $x \leq b$. Za skup koji ima konačnu gornju granicu kažemo da je **ograničen odozgo**.
- Skup A kažemo da je **ograničen** ako ima konačnu donju i gornju granicu. Skup A je ograničen ako i samo ako postoji pozitivan realan broj M tako da za svako $x \in A$ važi $|x| \leq M$.

- $a \in \overline{\mathbf{R}}$ je **donja granica** skupa A, ako za svako $x \in A$ važi $a \leq x$. Za skup koji ima konačnu donju granicu kažemo da je **ograničen odozdo**.
- $b \in \overline{\mathbf{R}}$ je **gornja granica** skupa A, ako za svako $x \in A$ važi $x \leq b$. Za skup koji ima konačnu gornju granicu kažemo da je **ograničen odozgo**.
- Skup A kažemo da je **ograničen** ako ima konačnu donju i gornju granicu. Skup A je ograničen ako i samo ako postoji pozitivan realan broj M tako da za svako $x \in A$ važi $|x| \leq M$.

Ako skup nije ograničen odozgo, onda je ∞ jedina gornja granica tog skupa. Slično, ako nije ograničen odozdo, jedina donja granica je $-\infty$

Primer: Interval $S = [0, 1]$ je ograničen.



Primer: Interval $S = [0, 1]$ je ograničen.

- Gornje granice skupa S su $1, \sqrt{2}, 2, 3, \pi, \ldots$

Primer: Interval $S = [0, 1]$ je ograničen.

- Gornje granice skupa S su $1, \sqrt{2}, 2, 3, \pi, \ldots$
- Najmanja gornja granica skupa S je 1, a to je maksimum ovog skupa.
- Donje granice skupa S su $-7, -\pi, -3, -1, 0, \ldots$

Primer: Interval $S = [0, 1]$ je ograničen.

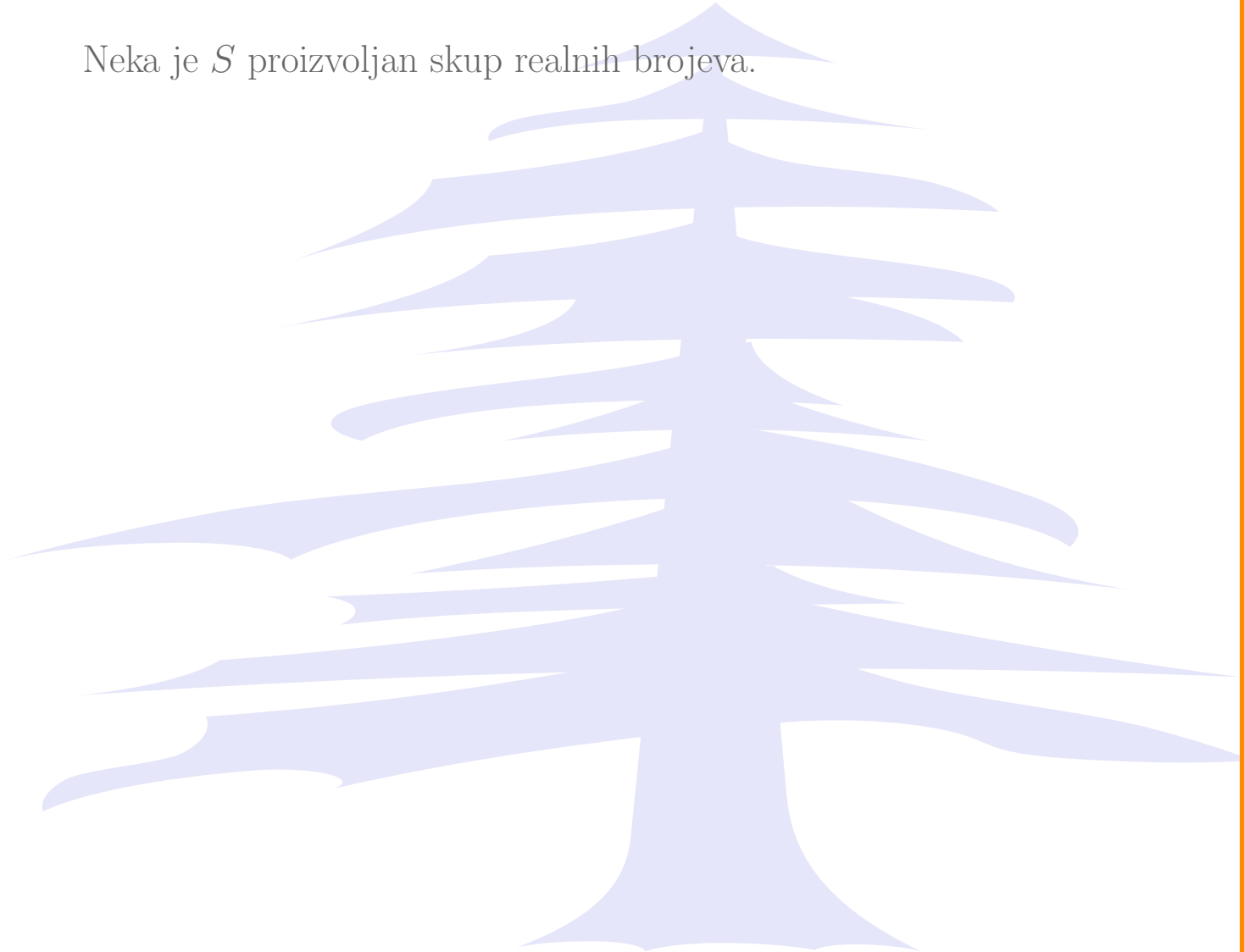
- Gornje granice skupa S su $1, \sqrt{2}, 2, 3, \pi, \ldots$
- Najmanja gornja granica skupa S je 1, a to je maksimum ovog skupa.
- Donje granice skupa S su $-7, -\pi, -3, -1, 0, \ldots$
- Najveća donja granica skupa S je 0 - minimum.

Primer: Interval $S = [0, 1]$ je ograničen.

- Gornje granice skupa S su $1, \sqrt{2}, 2, 3, \pi, \ldots$
- Najmanja gornja granica skupa S je 1, a to je maksimum ovog skupa.
- Donje granice skupa S su $-7, -\pi, -3, -1, 0, \ldots$
- Najveća donja granica skupa S je 0 - minimum.

Uopšte, ako proizvoljni skup S ima maksimum M, onda je M istovremeno i najmanja gornja granica skupa S. Minimum (ako postoji) je najveća donja granica.

Neka je S proizvoljan skup realnih brojeva.



Neka je S proizvoljan skup realnih brojeva.

- **Supremum** skupa S je njegova najmanja gornja granica.

Neka je S proizvoljan skup realnih brojeva.

- **Supremum** skupa S je njegova najmanja gornja granica.
- **Infimum** skupa S je njegova najveća donja granica.

Neka je S proizvoljan skup realnih brojeva.

- **Supremum** skupa S je njegova najmanja gornja granica.
- **Infimum** skupa S je njegova najveća donja granica.

Ako su $\inf S$, *odnosno* $\sup S$ *konačni, i ako* S *nije prazan skup, tada*

$$\inf S = a \iff (\forall x \in S)(x \geq a) \wedge (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in S)(x < a + \varepsilon)$$
$$\sup S = b \iff (\forall x \in S)(x \leq b) \wedge (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in S)(x > b - \varepsilon)$$

Kompleksni brojevi

.

Kompleksni broj je:

Kompleksni brojevi

.

Kompleksni broj je:

- Uređen par $z = (x, y)$, gde su x, y realni brojevi.

Kompleksni brojevi

.

Kompleksni broj je:

- Uređen par $z = (x, y)$, gde su x, y realni brojevi.
- U **algebarskom obliku**, $z = x + iy$, gde je x realni deo, a y imaginarni deo broja z, u oznakama

$$x = \mathrm{Re}\ z, \quad y = \mathrm{Im}\ z.$$

Kompleksan broj i naziva se **imaginarnom jedinicom**.

Kompleksni brojevi

.

Kompleksni broj je:

- Uređen par $z = (x, y)$, gde su x, y realni brojevi.
- U **algebarskom obliku**, $z = x + iy$, gde je x realni deo, a y imaginarni deo broja z, u oznakama

$$x = \mathrm{Re}\ z, \quad y = \mathrm{Im}\ z.$$

  Kompleksan broj i naziva se **imaginarnom jedinicom**.
- U **trigonometrijskom obliku**, kao $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, gde je r **modul**, a θ **argument** kompleksnog broja z.

Kompleksni brojevi

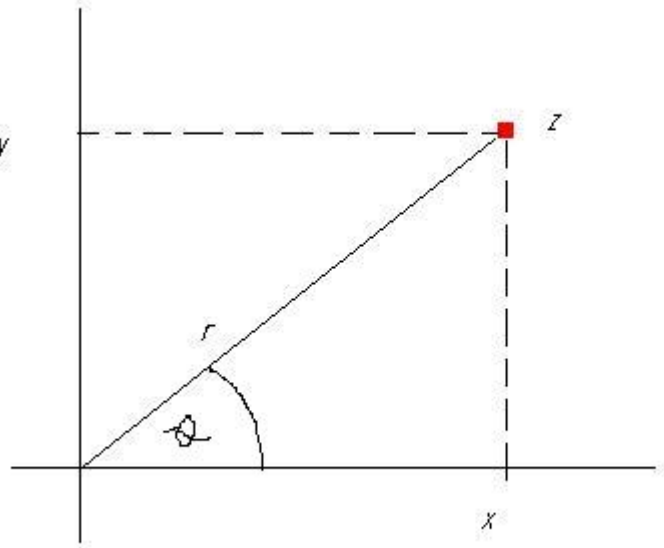
.

Kompleksni broj je:

- Uređen par $z = (x, y)$, gde su x, y realni brojevi.
- U **algebarskom obliku**, $z = x + iy$, gde je x realni deo, a y imaginarni deo broja z, u oznakama

$$x = \mathrm{Re}\ z, \quad y = \mathrm{Im}\ z.$$

  Kompleksan broj i naziva se **imaginarnom jedinicom**.
- U **trigonometrijskom obliku**, kao $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, gde je r **modul**, a θ **argument** kompleksnog broja z.


jy
z
r
θ
x

- *Za dato r i θ, dobijaju se jedinstveni x i y*

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

- *Za dato r i θ, dobijaju se jedinstveni x i y*

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

- *Za dato x, y, dobija se*

$$\textit{Jedinstveno } r \ : \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

- *Za dato r i θ, dobijaju se jedinstveni x i y*

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

- *Za dato x, y, dobija se*

$$\text{Jedinstveno } r \ : \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

i beskonačno mnogo raznih vrednosti za θ;

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pregled korisnih formula

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad |z|^2 = z\bar{z}.$$

$$\operatorname{Re} z \leq |z|, \quad \operatorname{Im} z \leq |z|.$$

Nejednakosti

NEJEDNAKOST TROUGLA:

Nejednakosti

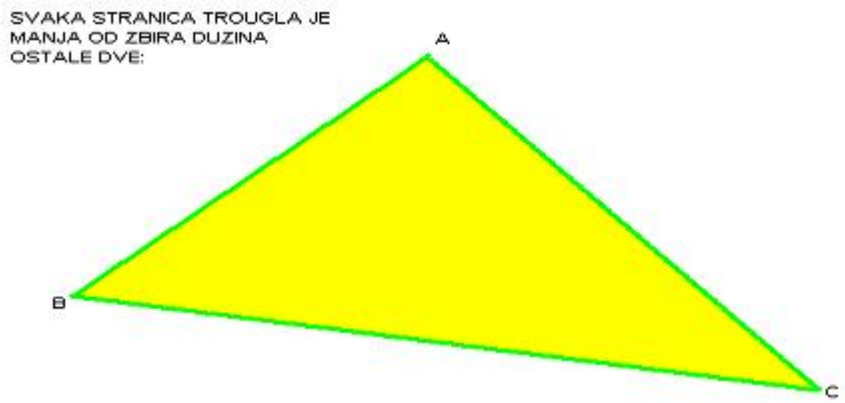
NEJEDNAKOST TROUGLA:

U trouglu ABC je $|\vec{AB}| = |\vec{AC} + \vec{CB}| \leq |\vec{AC}| + |\vec{CB}|$:

Nejednakosti

NEJEDNAKOST TROUGLA:

U trouglu ABC je $|\vec{AB}| = |\vec{AC} + \vec{CB}| \leq |\vec{AC}| + |\vec{CB}|$:



Za svaka dva realna ili kompleksna broja z_1, z_2, važi nejednakost

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Za svaka dva realna ili kompleksna broja z_1, z_2, važi nejednakost

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Ideja dokaza: Kvadrirati obe strane!

Za svaka dva realna ili kompleksna broja z_1, z_2, važi nejednakost

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Ideja dokaza: Kvadrirati obe strane!

Primeri:

Za svaka dva realna ili kompleksna broja z_1, z_2, važi nejednakost

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Ideja dokaza: Kvadrirati obe strane!

Primeri:

- $|-1+2| < |-1| + |2| = 3$;
- $|1+i| = \sqrt{2} < |1| + |i| = 2$;

Za svaka dva realna ili kompleksna broja z_1, z_2, važi nejednakost

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Ideja dokaza: Kvadrirati obe strane!

Primeri:

- $|-1+2| < |-1| + |2| = 3$;
- $|1+i| = \sqrt{2} < |1| + |i| = 2$;

Ako su a, b, c proizvoljni realni ili kompleksni brojevi, onda je

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$$

BERNOULLIJEVA NEJEDNAKOST:

BERNOULLIJEVA NEJEDNAKOST:

Za proizvoljan realan broj $x > -1$, $x \neq 0$ *i za svaki prirodan broj* $n \geq 2$ *važi da je*

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

BERNOULLIJEVA NEJEDNAKOST:

Porodica Bernoulli

Za proizvoljan realan broj $x > -1$, $x \neq 0$ *i za svaki prirodan broj* $n \geq 2$ *važi da je*

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Dokaz: Matematičkom indukcijom počevši od $n = 2$

Šta je matematička indukcija?

NEJEDNAKOSTI ZA SINUSNU FUNKCIJU

(1) $$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \qquad x \in (0, \pi/2),$$

NEJEDNAKOSTI ZA SINUSNU FUNKCIJU

(1) $$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \qquad x \in (0, \pi/2),$$

(2) $$|\sin x| < |x|, \qquad x \in \mathbf{R},\ x \neq 0,$$

NEJEDNAKOSTI ZA SINUSNU FUNKCIJU

(1) $$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \qquad x \in (0, \pi/2),$$

(2) $$|\sin x| < |x|, \qquad x \in \mathbf{R},\ x \neq 0,$$

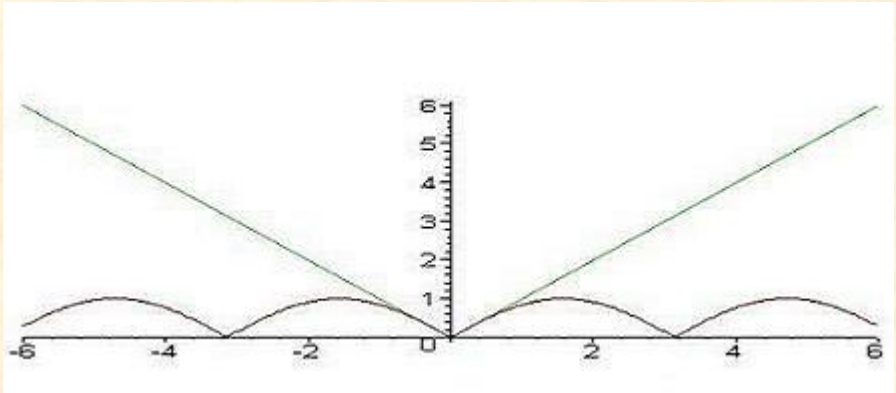
(3) $$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \qquad x, y \in \mathbf{R}.$$

NEJEDNAKOSTI ZA SINUSNU FUNKCIJU

(1) $$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \qquad x \in (0, \pi/2),$$

(2) $$|\sin x| < |x|, \qquad x \in \mathbf{R},\ x \neq 0,$$

(3) $$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \qquad x, y \in \mathbf{R}.$$



Ilustracija nejednakosti (2).

U ovom delu smo naučili

U ovom delu smo naučili

- Kako se beskonačni skupovi porede po veličini;

U ovom delu smo naučili

- Kako se beskonačni skupovi porede po veličini;
- Kardinalne brojeve $\aleph_0$ and c

U ovom delu smo naučili

- Kako se beskonačni skupovi porede po veličini;
- Kardinalne brojeve $\aleph_0$ and c
- Skup realnih brojeva proširen simbolima ∞ i $-\infty$. Dozvoljene i nedozvoljene operacije sa ∞.

U ovom delu smo naučili

- Kako se beskonačni skupovi porede po veličini;
- Kardinalne brojeve $\aleph_0$ and c
- Skup realnih brojeva proširen simbolima ∞ i $-\infty$. Dozvoljene i nedozvoljene operacije sa ∞.
- Poredak: minimum, maksimum, infimum, supremum.

U ovom delu smo naučili

- Kako se beskonačni skupovi porede po veličini;
- Kardinalne brojeve $\aleph_0$ and c
- Skup realnih brojeva proširen simbolima ∞ i $-\infty$. Dozvoljene i nedozvoljene operacije sa ∞.
- Poredak: minimum, maksimum, infimum, supremum.
- Osnovne osobine kompleksnih brojeva.

U ovom delu smo naučili

- Kako se beskonačni skupovi porede po veličini;
- Kardinalne brojeve $\aleph_0$ and c
- Skup realnih brojeva proširen simbolima ∞ i $-\infty$. Dozvoljene i nedozvoljene operacije sa ∞.
- Poredak: minimum, maksimum, infimum, supremum.
- Osnovne osobine kompleksnih brojeva.
- Nejednakosti

U ovom delu smo naučili

- Kako se beskonačni skupovi porede po veličini;
- Kardinalne brojeve $\aleph_0$ and c
- Skup realnih brojeva proširen simbolima ∞ i $-\infty$. Dozvoljene i nedozvoljene operacije sa ∞.
- Poredak: minimum, maksimum, infimum, supremum.
- Osnovne osobine kompleksnih brojeva.
- Nejednakosti

  Nejednakost trougla (**važna nejednakost!**),

U ovom delu smo naučili

- Kako se beskonačni skupovi porede po veličini;
- Kardinalne brojeve $\aleph_0$ and c
- Skup realnih brojeva proširen simbolima ∞ i $-\infty$. Dozvoljene i nedozvoljene operacije sa ∞.
- Poredak: minimum, maksimum, infimum, supremum.
- Osnovne osobine kompleksnih brojeva.
- Nejednakosti

  Nejednakost trougla (**važna nejednakost!**),

  Bernoulli-jeva nejednakost (uskoro ćemo je koristiti),

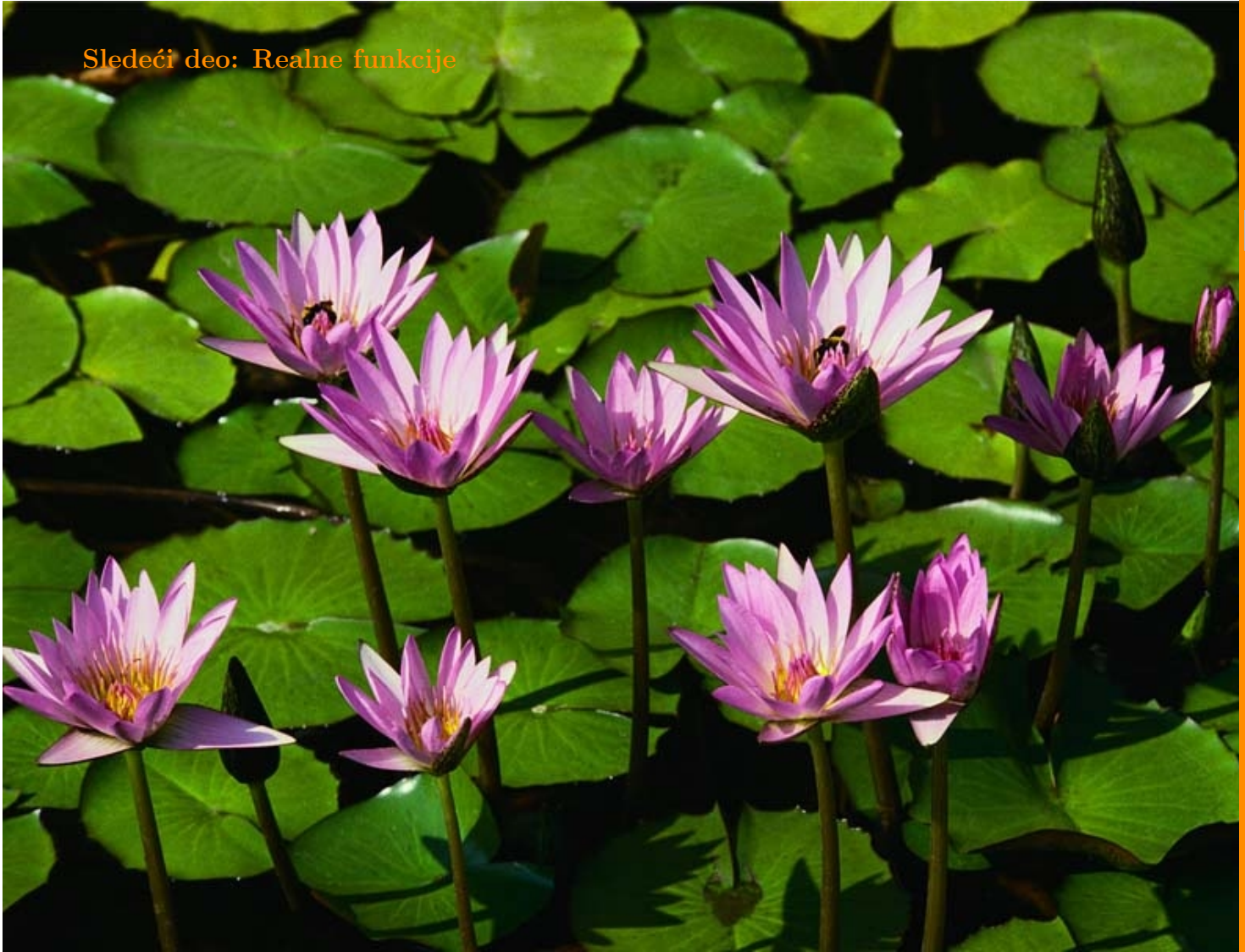
U ovom delu smo naučili

- Kako se beskonačni skupovi porede po veličini;
- Kardinalne brojeve $\aleph_0$ and c
- Skup realnih brojeva proširen simbolima ∞ i $-\infty$. Dozvoljene i nedozvoljene operacije sa ∞.
- Poredak: minimum, maksimum, infimum, supremum.
- Osnovne osobine kompleksnih brojeva.
- Nejednakosti

  Nejednakost trougla (**važna nejednakost!**),

  Bernoulli-jeva nejednakost (uskoro ćemo je koristiti),

  Nejednakosti za sinusnu funkciju (takođe ćemo koristiti uskoro)


Sledeći deo: Realne funkcije